§3.2 柯西积分定理

问题：$\oint_C f(z)dz \overset{?}{\Longleftrightarrow} f(z)$ 解析

一、柯西积分定理

1、定义

Def. 复平面上光滑或分段光滑的简单有向封闭曲线称为围线

Rem. 围线围成一个单连域

2. 柯西积分定理

Thm 1. 设 $f(z)$ 在单连域 D 上解析，对 D 内任一条围线 C 都有 $\oint_C f(z)dz = 0$.

Rem. (1) 1851 年前后 Cauchy. Riemann 加强条件：$f'(z)$ 连续的简单证明：

Pf. $f(z)$ 解析则 $u_x = v_y$, $v_x = -u_y$

$f'(z)$ 连续 $\Rightarrow u_x, v_x, u_y, v_y$ 连续

$\oint_C f(z)dz = \oint_C udx - vdy + i\oint_C vdx + udy$

由 Green 公式，$\oint_C udx - vdy = \oint_C vdx + udy \equiv 0$

(2) 1900 年 法国数学家 Goursat 给出分析证法：

① C 为三角形围线时 $\oint_\Delta f(z)dz = 0$.

由 $\oint_C 1dz = 0$, $\oint_C zdz = 0$, 导数定义，闭区域套定理可证

② C 为折线所围时 $\oint_C f(z)dz = 0$

将 C 分成若干个三角形围线 C_n，则有：

$\oint_C f(z)dz = \sum \oint_{C_n} f(z)dz = 0$

③ 逼近思想：一致连续、导数定义

$\forall \varepsilon>0$，$\exists$ 与 C 逼近的折线状围线 C_1 s.t.

$$\left|\oint_C f(z)\,dz-\oint_{C_1} f(z)\,dz\right|<\varepsilon$$

即 $\left|\oint_C f(z)\,dz\right|<\varepsilon$ $\left(\oint_{C_1} f(z)\,dz=0\right)\Rightarrow \oint_C f(z)\,dz=0$.

3. 推广

~~Cor.~~ Thm2. 设 $f(z)$ 在围线 C 所围区域 D 内解析，在区域 $\overline{D}=D+C$ 上连续，则 $\oint_C f(z)\,dz=0$.

证明思路：Goursat 方法中 ③ 可证.

Cor. 设 $f(z)$ 在单连域 D 内解析，对 D 的任意封闭曲线 C，都有 $\oint_C f(z)\,dz=0$.

Pf. C 可分成若干围线 C_i：$C=C_1+\cdots+C_n$

$$\oint_C=\sum_{i=1}^{n}\oint_{C_i}=0.$$

二. 原函数与不定积分

1. 定义

Def. 设 $f(z)$ 在区域 D 上连续，若对 D 内任意两点 z_1 与 z_2 及连接 z_1 到 z_2 的光滑曲线 C_1 与 C_2，都有 $\int_{C_1} f(z)\,dz=\int_{C_2} f(z)\,dz$，则称积分 $\int_C f(z)\,dz$ 在 D 内与路径无关.

等价定义：$f(z)$ 在区域 D 上连续，则 $\int_C f(z)\,dz$ 与路径无关，

$\Leftrightarrow$ 对 D 内任意围线 C 有 $\oint_C f(z)\,dz=0$.

2. 积分与路径无关

Thm 3. 设 $f(z)$ 在区域 D 上连续，且复积分 $\int_C f(z)dz$ 在 D 上与路径无关，任取定 $z_0 \in D$，记 $F(z)=\int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$，则 F 在 D 内解析且 $F'(z)=f(z)$.

Pf. $\forall z \in D$，下证 $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta F(z)}{\Delta z} = f(z)$：

$$\frac{\Delta F(z)}{\Delta z} = \frac{1}{\Delta z}\left(F(z+\Delta z)-F(z)\right) = \frac{1}{\Delta z}\left(\int_{z_0}^{z+\Delta z} - \int_{z_0}^{z}\right) = \frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} f(\zeta)d\zeta$$

$$\left|\frac{\Delta F(z)}{\Delta z} - f(z)\right| = \left|\frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} f(\zeta)d\zeta - \int_{z}^{z+\Delta z} f(z)d\zeta\right| \le \frac{1}{|\Delta z|}\int_{z}^{z+\Delta z}|f(\zeta)-f(z)||d\zeta|$$

由于 $f(\zeta)$ 在 z 连续，$\forall \varepsilon>0$，$\exists \delta>0$ 当 $|\zeta - z|<\delta$ 时 $|f(\zeta)-f(z)|<\varepsilon$

当 $|\Delta z|<\delta$ 时，$\left|\frac{\Delta F(z)}{\Delta z} - f(z)\right| \le \frac{1}{|\Delta z|}\int_{z}^{z+\Delta z}|f(\zeta)-f(z)||d\zeta|$

取直线段有：$\frac{1}{|\Delta z|}\int_{z}^{z+\Delta z}|f(\zeta)-f(z)||d\zeta| \le \frac{1}{|\Delta z|}\varepsilon\cdot|\Delta z| = \varepsilon$

$\therefore \lim\limits_{\Delta z \to 0}\frac{\Delta F(z)}{\Delta z} = f(z)$，即 $F'(z)=f(z)$.

于是有下面结论：

任意复积分与路径无关的连续函数都是某解析函数的导函数.

Cor. 若 $f(z)$ 在单连域 D 上解析，任取 $z_0 \in D$，记 $F(z)=\int_{z_0}^{z} f(z)dz$，则 $F'(z)=f(z)$.

3. 原函数

Def. 设 $f(z)$ 在区域 D 上连续，若存在 D 上解析函数 $\Phi(z)$ 使 $\Phi'(z)=f(z)$，则称 $\Phi(z)$ 是 $f(z)$ 的一个原函数，$\Phi(z)+C$ 是所有原函数，称 $\int f(z)dz = \Phi(z)+C$ 为 f 的不定积分

Thm 4. (Newton - Leibniz)

设$f(z)$在单连域D上解析，$\Phi(z)$是$f(z)$的一个原函数，则对D内任意两点z_1, z_2，$\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz = \Phi(z_2) - \Phi(z_1)$

Pf. 记$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\xi)\,d\xi$，则$F(z)$也是$f(z)$的原函数.

$\exists$常数c s.t. $\Phi(z) = F(z) + C$，则$I = \int_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz$

$= \int_{z_0}^{z_2} f(\xi)\,d\xi - \int_{z_0}^{z_1} f(\xi)\,d\xi = F(z_2) - F(z_1) = \Phi(z_2) - \Phi(z_1)$.

例1 (1) $\int_0^i z^5\,dz = \frac{z^6}{6}\Big|_0^i = -\frac{1}{6}$

(2) $\int_0^i \sin z\,dz = -\cos z\Big|_0^i = 1 - \cos i = 1 - \frac{1+e^2}{2e}$

(3) $\oint\limits_{|z-1|=1} \sqrt{z}\,dz = 0$ ($z=0$为可去间断点)

(4) $\oint\limits_{|z|=\frac{1}{2}} \ln(1+z)\,dz = 0$，$\oint\limits_{|z|=1} \ln(1+z)\,dz$ 无意义(在$z=-1$处无极限)

三、复围线上的柯西积分定理

1. 复围线：

Def. 设$C_0, C_1, \cdots, C_n$是复平面上$n+1$条围线，且$C_1, C_2, \cdots, C_n$全含在C_0内，$C_1, C_2, \cdots, C_n$互不相交且相互不含在内部，称复合曲线$C = C_0 + C_1^{-1} + \cdots + C_n^{-1}$为复围线.

Rem. 复围线围成一个有n个"洞"的复连域.

2. 复围线上的柯西积分定理

Thm 5. (Cauchy积分定理推广)

设复围线$C = C_0 + C_1^{-1} + \cdots + C_n^{-1}$ $(n \geq 1)$所围区域为D，$f(z)$在D上解析，在$\bar{D} = D + C$上连续，则$\oint\limits_C f(z)\,dz = 0$.

则 $\oint_{C_0} f(z)dz = \sum_{i=1}^{n} \oint_{C_i} f(z)dz$

Pf. 作辅助线 γ_0：连接 C_0 到 C_1，γ_1：连接 C_1 到 C_2，…，γ_n：连接 C_n 到 C_0，这样复连域 D 可分成两个单连域 D_1，D_2，记 D_1 与 D_2 的正向边界，围线为 L_1，L_2

由 Thm 2.，$\oint_{L_1} f(z)dz = 0$，$\oint_{L_2} f(z)dz = 0$

$$\oint_C f(z)dz = \oint_{L_1} + \oint_{L_2} = 0.$$

例2 设 C 是内部含点 a 的围线，则

$$\oint_C \frac{1}{(z-a)^n} dz = \begin{cases} 2\pi i, & n=1 \\ 0, & n \neq 1, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Pf. 以 $z=a$ 为圆心作小圆 Γ_ρ 取逆时针，ρ 很小使 Γ_ρ 含在 C 内部，记复围线 $C_0 = C + \Gamma_\rho^{-1}$，由复围线上的柯西积分定理知 $\oint_{C_0} \frac{1}{(z-a)^n} dz = 0$，则 $\oint_{C} \frac{1}{(z-a)^n} dz = \oint_{\Gamma_\rho} \frac{1}{(z-a)^n} dz$

$$= \begin{cases} 2\pi i, & n=1 \\ 0, & n \neq 1, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

例如，$\oint_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z} dz = 0$（柯西积分定理）

$\oint_{|z-1|=2} \frac{1}{z} dz = 0$（例2结果）

$\oint_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z^3} dz = 0$（柯西积分定理）

$\oint_{|z-1|=2} \frac{1}{z^3} dz = 0$（例2结果）